

RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Éléments de solutions de l'épreuve de qualifications du 2009

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

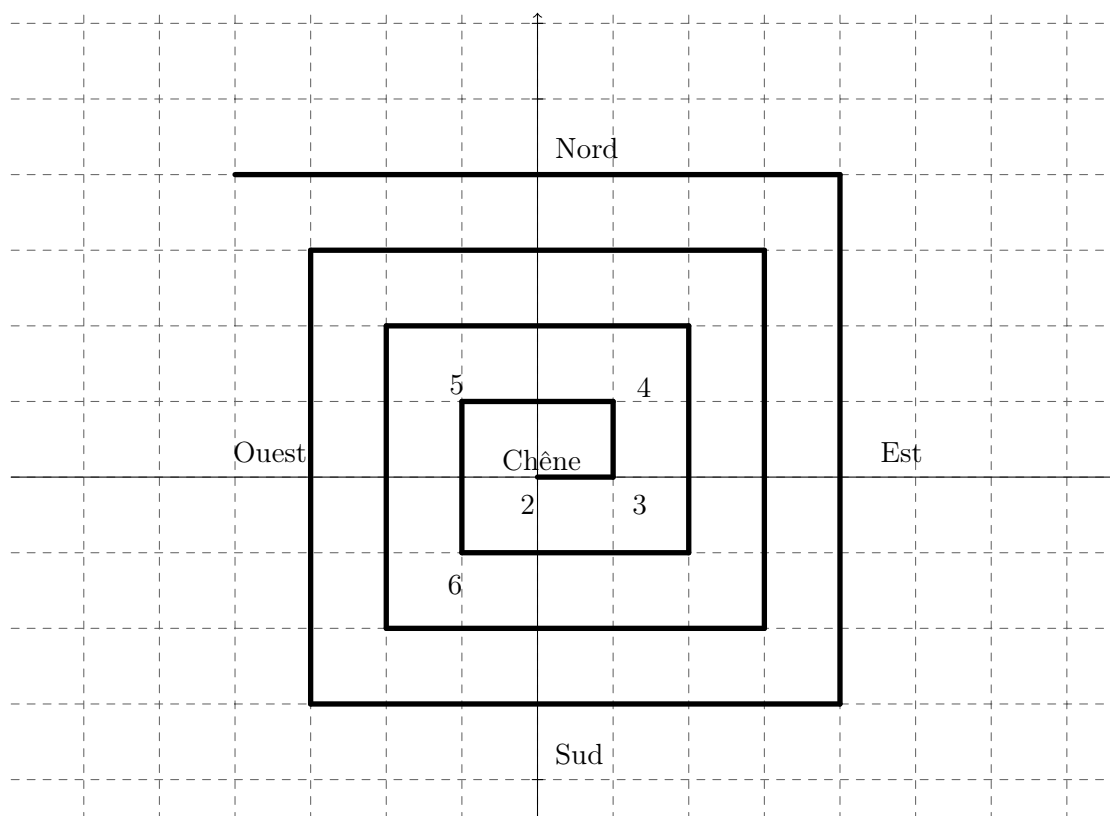
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

1 Le fol écureuil

1.1 Énoncé

Un écureuil rigoureux et courageux décide d'enterrer sa récolte de noix de façon logique. Ainsi, au cœur de l'hiver, quand la neige aura modifié le paysage, il saura retrouver rapidement son butin.

Au pied du plus grand chêne de la forêt, il dépose 2 noix, puis se dirige à l'est sur 1 mètre et dépose 3 noix. Il prend ensuite la direction du nord sur 1 mètre et dépose 4 noix, celle de l'ouest sur 2 mètres et dépose 5 noix et celle du sud sur 2 mètres et dépose 6 noix et ainsi de suite en tournant autour du grand chêne comme l'indique la spirale ci-dessous.



Se sachant très gourmand, il s'assure une grosse récolte à l'automne.

La neige tombée, l'écureuil souhaite retrouver le plus rapidement possible l'endroit où il a caché **15** noix.

Calculez la plus courte distance à parcourir (en valeur exacte et en valeur approchée au mètre près).

Et s'il voulait retrouver l'endroit où il aurait caché 2009 noix, quelle serait la distance du plus court chemin à partir du grand chêne ?

Vous détaillerez le plus possible votre démarche.

1.2 Analyse à priori.

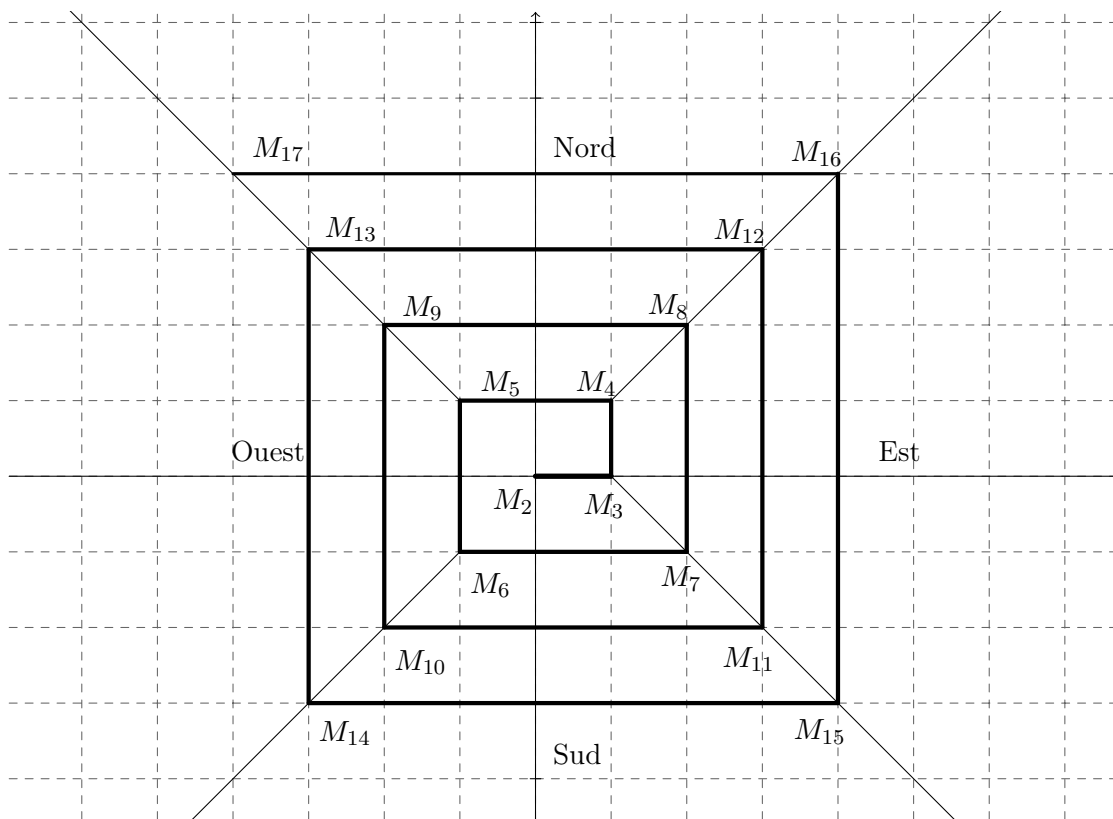
Le problème de l'écureuil nécessite de savoir calculer une distance dans un triangle rectangle, en n'oubliant pas que « dans le plan, le plus court chemin, c'est la ligne droite ».

L'élève peut placer le point où se trouvent les 15 noisettes et calculer la distance parcourue (Théorème de Pythagore).

La fin du problème nécessite de trouver, par un raisonnement, où se trouvent les 2009 noisettes.

En observant la spirale, l'élève conjecture que si deux nombres de noisettes ont le même reste dans la division par 4, alors leurs emplacements sont alignés.

Le démontrer paraît difficile à demander à un élève de 3^e car un raisonnement par récurrence est nécessaire (solution rédigée ci-dessous). On attendra par contre qu'il décrive ses observations et sa méthode la plus clairement possible.



1.3 Solution élève.

L'outil de résolution est la notion de division euclidienne abordée au collège, et peut-être oubliée au lycée.

On peut associer à chaque nombre n de noisettes déposées, un point M_n .

- Après avoir placé M_{15} la distance OM_{15} est donnée en appliquant le théorème de Pythagore dans un triangle de côtés 4 mètres et 3 mètres :

$$OM_{15} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$
- En observant la spirale, l'élève remarque que 5, 9 et 13 ont pour reste 1 dans la division par 4 et que M_5 , M_9 et M_{13} sont sur la demi-droite $[M_2, M_5)$.

Leur distance par rapport à M_2 peut être déterminée en comptant le nombre de diagonales du carré unité du quadrillage.

En effet, l'élève remarque que $5 = 1 \times 4 + 1$, $9 = 2 \times 4 + 1$, $13 = 3 \times 4 + 1$ et que M_5 , M_9 et M_{13} sont respectivement à 1, 2 et 3 diagonales du point M_2 .

Or $2009 = 502 \times 4 + 1$ donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1 et le point M_{2009} est sur la demi-droite $[M_2, M_5)$ et sa distance par rapport à M_2 est 502 diagonales.

Une diagonale mesurant $\sqrt{2}$ m, $M_2 M_{2009} = 502\sqrt{2} = 710$ m au mètre près.

1.4 Solution experte

On considère le repère orthonormé centré en M_2 (le grand chêne) et d'unité 1m, tel que $M_3(1;0)$ et $M_4(1;1)$. On peut associer à chaque nombre n de noisettes déposées, un point M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$.

Chercher la distance minimale séparant le grand chêne du point M_{2009} nécessite de déterminer la position du point M_{2009} dans le plan.

Il apparaît que suivant le reste de la division euclidienne de n par 4, les points sont situés sur une des quatre demi-droites :

- $[M_2M_4)$ si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0. $n \equiv 0 \pmod{4}$
- $[M_2M_5)$ si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 1. $n \equiv 1 \pmod{4}$
- $[M_2M_6)$ si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 2. $n \equiv 2 \pmod{4}$
- $[M_3M_7)$ si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 3. $n \equiv 3 \pmod{4}$

Or $2009 = 502 \times 4 + 1$, donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1.

Nous allons prouver par récurrence que :

Pour tout entier n , tel que $n \equiv 1 \pmod{4}$, on a $M_n \in [M_2M_5)$.

L'équation de $[M_2M_5)$ est $y = -x$, avec x négatif.

Vérification de la condition initiale : $9 = 2 \times 4 + 1$ et les coordonnées de $M_9 (-2; 2)$ vérifient bien l'équation de $y = -x$. Donc $M_9 \in [M_2M_5)$.

Supposons la propriété vraie pour M_n et montrons que $M_{n+4} \in [M_2M_5)$.

Comme $M_n (x_n; y_n) \in [M_2M_5)$ alors $y_n = -x_n$ (*).

Par construction, $M_{n+1} (x_n; -y_n + 1)$ puis $M_{n+2} (-x_n; -y_n + 1)$ puis $M_{n+3} (x_n; -(-y_n + 1))$ et enfin $M_{n+4} (x_n + 1; y_n - 1)$ (**).

Vérifions que les coordonnées de M_{n+4} vérifient l'équation de $[M_2M_5)$.

D'après l'hypothèse de récurrence $y_n = -x_n$, alors $y_n - 1 = -x_n - 1 = -(x_n + 1)$ donc $y_{n+4} = -x_{n+4}$; ainsi $M_{n+4} \in [M_2M_5)$.

On en déduit que $M_{2009} \in [M_2M_5)$.

Montrons par récurrence que les coordonnées de M_{2009} sont de la forme $(-q; q)$ où q est le quotient entier de la division de 2009 par 4.

Vérification initiale :

$9 = 2 \times 4 + 1$ Les coordonnées de $M_9 (-2 ; 2)$ sont bien de la forme $(-q ; q)$ avec $q = 2$.

Supposons la propriété vraie pour M_n et montrons qu'elle l'est aussi pour le point M_{n+4} .

D'après l'hypothèse de récurrence vraie pour M_n , les coordonnées de M_n sont $(-q; q)$

D'après (**), les coordonnées de M_{n+4} sont alors $(-q + 1; q - 1)$ (**) que l'on peut écrire $(-(q - 1); q - 1)$, donc les coordonnées de M_{n+4} vérifient aussi le propriété encadrée ci-dessus.

Conclusion : les coordonnées de M_{2009} sont : $(-502; 502)$.

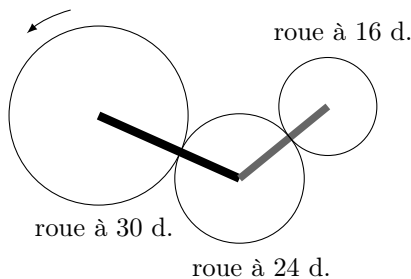
On peut ainsi calculer la distance $OM_{2009} = \sqrt{-(502)^2 + 502^2} = 502\sqrt{2} = 710$ m (au mètre près).

2 Engrenage

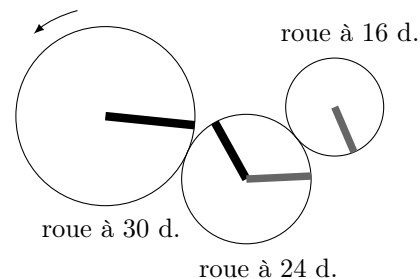
Un jeu d'engrenage est composé de 3 roues dentées :
L'une de 30 dents, une autre de 24 dents et enfin
une de 16 dents.



Au départ, les trois roues sont représentées par
le schéma suivant, sur lequel on a fait figurer
4 rayons.



Plus tard, les roues sont dans la position
ci-dessous.



En combien de tours par minute la roue de 30 dents doit-elle tourner pour retrouver la figure de départ toutes les 30 secondes exactement ?
Expliquez votre démarche.

2.1 Analyse a priori :

Initialement, l'idée était de faire tourner trois disques dont certains rayons marqués pouvaient former un triangle. A partir de cette idée, l'exercice était purement arithmétique et introduisait, à travers divers exemples, la notion de PPCM qui n'est pas aux programmes de troisième et seconde. Ces exemples donnaient divers triplets de rayons. La recherche du nombre de tours décrits par chaque roue dentée entre deux positions « triangle » était de difficulté croissante. La version finale a été simplifiée pour une meilleure compréhension des élèves : l'engrenage constitué de roues dentées permet de mieux visualiser la situation. Cette version se limite à une seule recherche de PPCM qui peut se limiter, pour les élèves, à une recherche de multiples. Elle permet, en outre, d'introduire une vitesse de rotation exprimée en nombre de tours par minute.

2.2 Solution

Dans un premier temps, les élèves devront s'appropriier l'énoncé et le comprendre : il faut que les roues aient fait un tour complet pour retrouver la position de départ.

Lorsque la roue 30d a fait un tour,

la roue 24d en a fait $1 + \frac{6}{24}$ soit **1 tour $\frac{1}{4}$** et la roue 16d, $1 + \frac{7}{8}$ soit **1 tour $\frac{7}{8}$** .

Il faut ensuite trouver un multiple commun aux nombres de dents de chacune des roues qui soit le plus petit possible, donc le PPCM de 30, 24 et 16 :

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$16 = 2^4$$

$$\text{donc } \text{PPCM}(30; 24; 16) = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$$

La roue 30d doit donc faire 8 tours ($\frac{240}{30}$) pour que les deux autres aient aussi fait des tours complets.

On veut qu'elle fasse ces 8 tours en 30 secondes soit **16 tours en 1 minute**.

3 Derby

3.1 Énoncé

Antoine, Bernard et Chris, fervents supporters du Racing, sortent du stade de football où ils ont assisté au derby entre le Racing et l'Olympique. Ils rencontrent Julien, autre supporter du club qui n'a pas pu assister au match. Julien demande le résultat, le score, les buteurs ...

- Le Racing a gagné, mais l'Olympique a marqué le premier, dit Antoine
- Le Racing a marqué le premier but et a gagné le match, affirme Bernard
- C'est l'Olympique qui a gagné et il y a eu 3 buts au total, commente Chris.

Julien sait que chacun de ses trois amis a soit énoncé deux vérités, soit proféré deux mensonges.

Donnez le score final du match, en expliquant votre démarche.

3.2 Analyse a priori

Cet exercice est un exercice de logique. Aucune connaissance spécifique des programmes de Troisième ou de Seconde n'est à mettre en jeu pour le résoudre.

Chaque supporter est soit un menteur, soit dit la vérité. Il n'y a donc que 8 cas possibles. Parmi ces 8 cas, il y en a un qui permettra de retrouver le score du match et 7 qui seront éliminés parce qu'ils présentent une contradiction.

Un groupe d'élèves devra savoir déceler une contradiction entre deux des discours, ce qui exige une bonne compréhension de ce discours. Il devra également éviter le piège qui consisterait à voir des affirmations contraires là où il n'y en a pas (la négation de « l'Olympique a marqué le premier » n'est pas « le Racing a marqué le premier »)

Il progressera rapidement vers la solution s'il reconnaît l'aspect binaire du problème (soit il y a mensonges et les deux affirmations sont fausses, soit il y a vérités et les deux affirmations sont vraies). Il pourra ainsi supposer qu'un des discours est exact et mettre en évidence une impossibilité : c'est le principe du raisonnement par l'absurde.

3.3 Solution :

Antoine et Bernard disent tous deux que le Racing a gagné, donc soit ils disent tous deux la vérité, soit ils mentent tous les deux.

De plus, Antoine et Bernard énoncent deux affirmations contradictoires concernant le club ayant marqué le premier. Ils ne peuvent donc pas dire la vérité tous les deux. Comme ils énoncent tous deux la victoire du Racing, Antoine et Bernard sont des menteurs.

Nous savons maintenant que le Racing n'a pas gagné et que le premier but n'a été marqué, ni par le Racing, ni par l'Olympique.

Nous en déduisons qu'aucune équipe n'a marqué. Le seul score possible du match est donc 0-0.

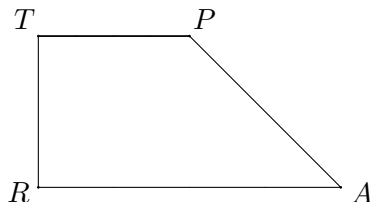
Réciproquement, ce score est effectivement possible et dans ce cas, Chris, tout comme Antoine et Bernard, est également un menteur.

4 Partage d'un trapèze

4.1 Énoncé

$TRAP$ est un trapèze rectangle tel que $TP = TR$ et $RA = 2 \times TR$.

Comment faire pour partager ce trapèze en quatre polygones de même aire ?
Proposez, au moins, deux solutions.

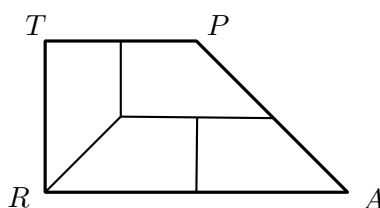
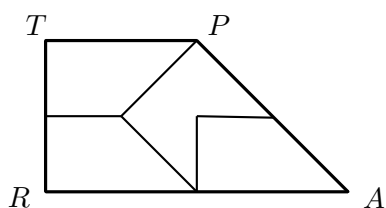
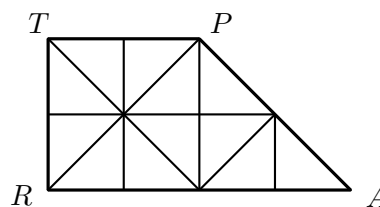


Vous répondrez sur la feuille en annexe.

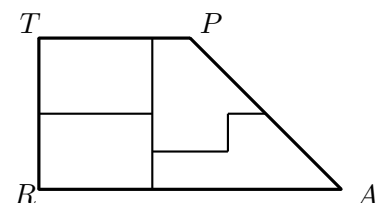
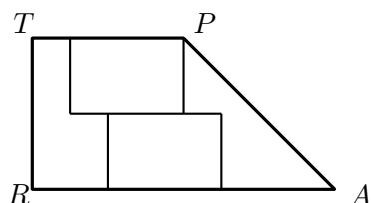
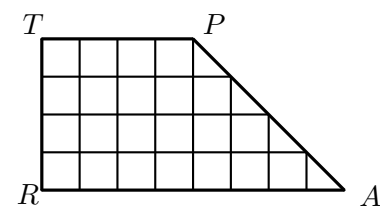
4.2 Éléments de solutions :

Première démarche. A partir de la forme définie dans l'énoncé, nous allons effectuer un partage du trapèze en un nombre multiple de 4 de polygones de même forme.

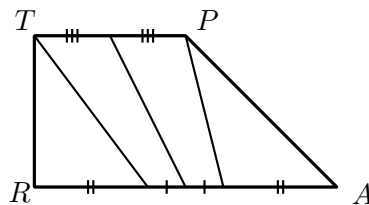
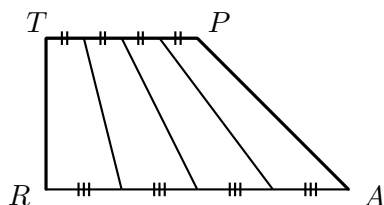
Pré-découpage en douze pièces superposables permettant de voir qu'en juxtaposant trois de ces triangles rectangles et isocèles, on obtiendra une solution.



Avec ce découpage, on associera six petits carrés ou quatre carrés et quatre triangles ou cinq carrés et deux triangles etc...



Seconde démarche : il est possible de tracer quatre trapèzes de même hauteur et dont les bases mesurent le quart des bases du trapèze initial. Cette construction est alors généralisable à un trapèze quelconque et à un partage en un nombre quelconque de polygones.



On peut tracer aussi deux trapèzes avec pour bases $\frac{1}{2}TP$ et $\frac{1}{4}TP$ et deux triangles de bases $\frac{3}{4}TP$.

5 Les rues Truc et Muche

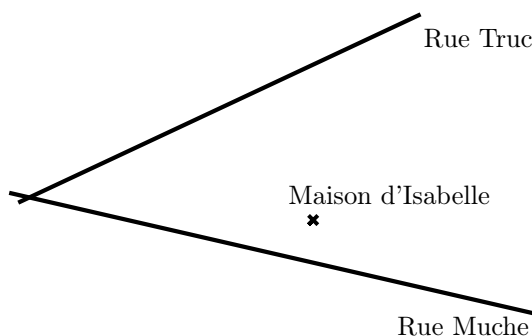
5.1 Énoncé

Dans le village d'Isabelle, les rues Truc et Muche sont sécantes. Isabelle a de la chance, elle habite exactement au milieu d'une troisième rue tout droite reliant son collège à son gymnase. Le gymnase est dans la rue Truc et le collège est dans la rue Muche.

Le dessin ci-dessous donne la position des deux rues et celle la maison d'Isabelle.

Construisez, avec précision, la position du collège et celle du gymnase.

Justifiez votre démarche.



Vous répondrez sur l'extrait de plan situé en fiche annexe.

5.2 Analyse a priori :

La question, qui se veut ouverte, laisse libre court à l'imagination. L'énoncé propose une situation où les rues Truc (t) et Muche (m) sont visiblement sécantes afin que les élèves intègrent parfaitement la nature géométrique des rues (droites). Le fait que la feuille réponse ne contienne pas le point O d'intersection des deux droites pourrait présenter un obstacle mais les élèves le contourneront certainement en traçant les dites droites pour faire apparaître leur point d'intersection puisque c'est possible.

Par ailleurs, aucune donnée numérique n'étant fournie, le choix d'une solution géométrique devrait rapidement se faire.

L'élève pourrait d'abord tâtonner avec règle ou compas ou réaliser une figure répondant aux contraintes en commençant par placer les points G (gymnase) et C (collège) cherchés puis le milieu I (maison d'Isabelle) de [CG]. Des configurations classiques pourraient alors être mises en évidence et conduire les élèves à une des solutions proposées.

Celles-ci faisant appel à des connaissances de la symétrie centrale et ou des propriétés de la droite des milieux dans un triangle et ou des propriétés du parallélogramme, un élève de troisième ou de seconde doit pouvoir mobiliser ces outils.

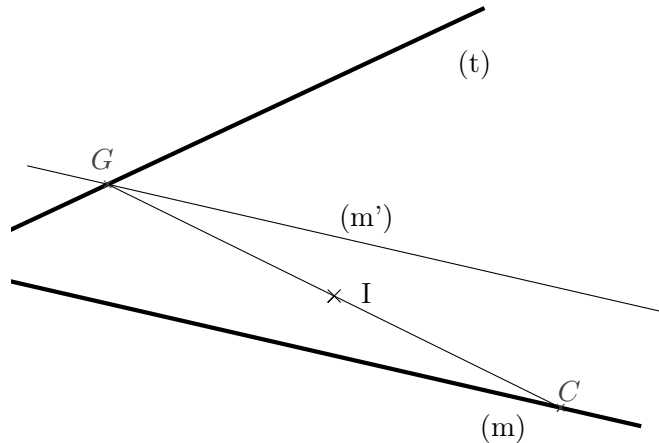
Plusieurs niveaux de réponses sont attendus :

1. Une figure laissant apparents tous les traits de construction.
2. Un programme de construction pourrait accompagner la figure.
3. Une démonstration s'appuyant sur les propriétés de la symétrie centrale, de la droite des milieux ou du parallélogramme viendrait consolider la démarche.

5.3 Éléments de solutions :

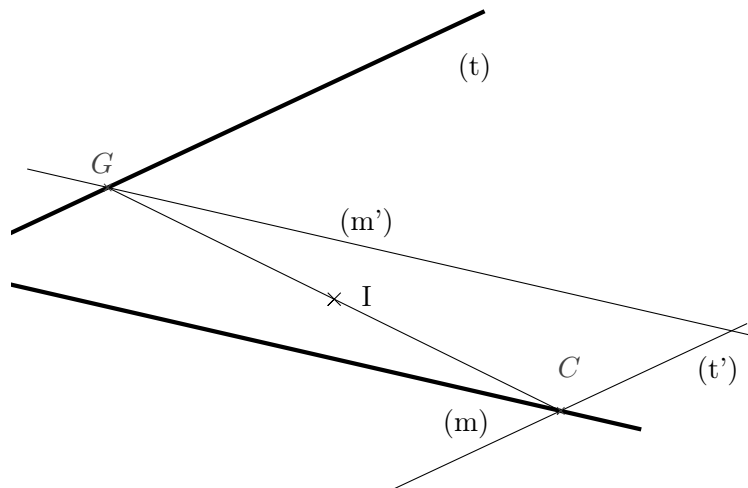
Solution 1 :

Soit (m') la droite symétrique de la droite (m) par la symétrie centrale de centre I . (m) est donc aussi la droite symétrique de (m') par rapport à I . Nommons G le point d'intersection de (m') et (t) . Le symétrique de G par rapport à I est le point C de la droite (m) tel que I soit milieu de $[GC]$.



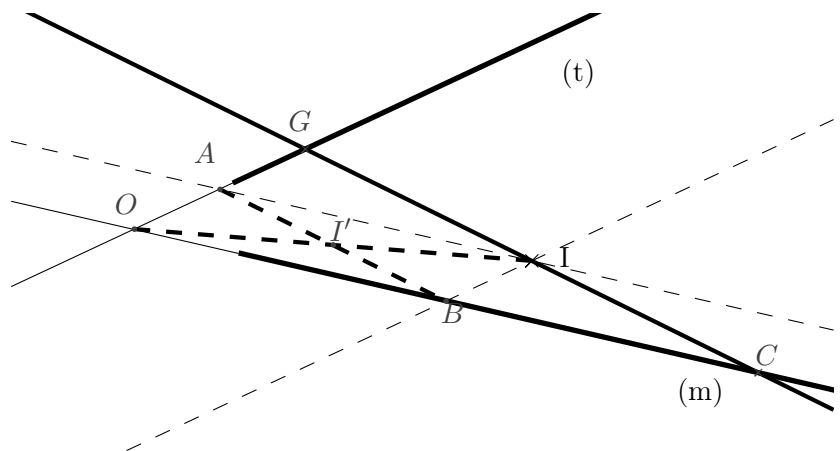
Solution 2 :

En construisant les symétriques de (t) et de (m) par rapport à I , on fait apparaître un parallélogramme dans lequel I est le milieu des diagonales. Une de ces diagonales n'est autre que $[CG]$.



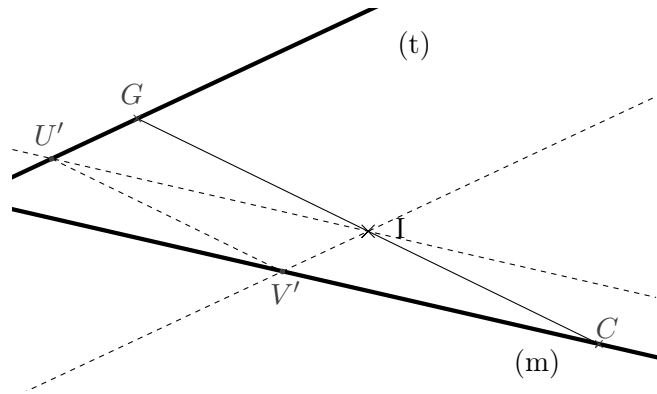
Solution 3 :

Nommons O le point d'intersection des deux droites et traçons le parallélogramme de diagonale $[OI]$ en traçant les parallèles à (t) et (m) passant par I . L'autre diagonale, alors visible (nommons-la $[AB]$) permet de placer le centre I' du dit parallélogramme. Les points G et C sont obtenus en traçant la parallèle à (AB) passant par I . En effet, d'après la propriété des milieux dans le triangle OIG : Le segment $[GI]$ parallèle à (AI') mesure le double du segment $[AI']$. De même, dans le triangle OIC , $IC = 2I'B$ et comme $AI' = I'B$ alors $GI = IC$.



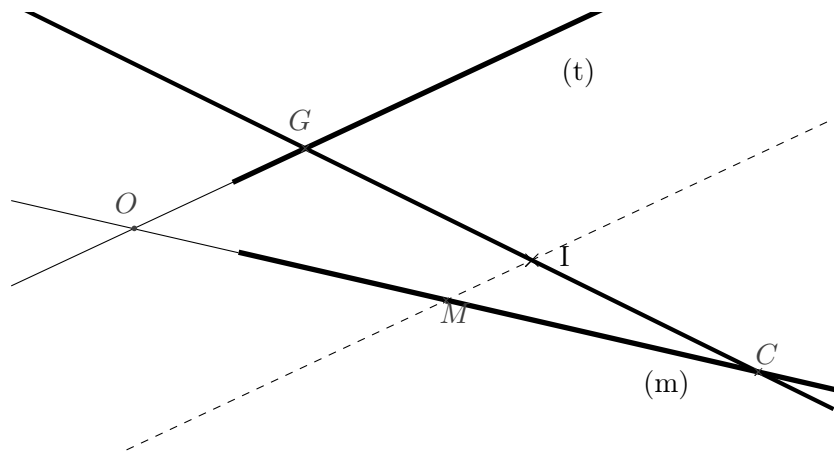
Solution 4 :

Les parallèles à (m) et (t) passant par I coupent (m) et (t) respectivement en V' et U'. La parallèle au segment [U'V'] passant par I coupe (t) en formant un parallélogramme IV'U'G. De même la parallèle au segment [U'V'] passant par I coupe (m) en formant un parallélogramme IU'V'C. Comme les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur, on a bien $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{IC}$ et I est ainsi le milieu de [GC].



Solution 5 :

Les droites (t) et (m) se coupent en O. La parallèle à (t) passant par I coupe la droite (m) en M. On considère C le symétrique de O par rapport à M et G le point d'intersection des droites (CI) et (t). Dans le triangle OGC, la parallèle à (OG) passant par le milieu M de [OC] coupe le segment [GC] en son milieu donc I est le milieu de [GC].



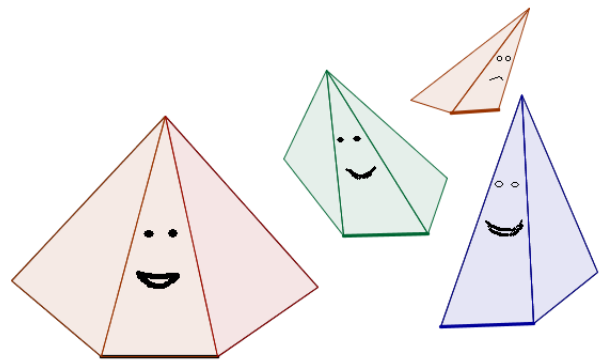
6 Pyramides des âges

Sur la planète Mathematix, les habitants ont tous la forme d'une pyramide.

Une des arêtes de la base détermine leur âge, on l'appelle **arête d'ancienneté**.

Quant à leur fortune, elle est tout simplement proportionnelle à leur volume.

Deux habitants de Mathematix ont le même âge car leur arête d'ancienneté mesure 6 centimètres. Ils disposent de la même fortune car leur volume est égal à 24 centimètres cubes. Pourtant, ils ne se ressemblent pas du tout.



Construisez en vraie grandeur un patron possible pour chacun de ces deux habitants. Justifiez votre démarche.

6.1 Analyse à priori :

Cet énoncé très ouvert ne fait appel qu'à une connaissance mathématique : celle du volume d'une pyramide. Par contre, l'appropriation de l'énoncé demande une lecture précise et la résolution appelle les élèves à faire des arbitrages en ce qui concerne la forme de ces pyramides.

Les pyramides étudiées de façon systématique au collège sont des pyramides régulières. Elles auront bien sûr toute leur place dans les solutions, mais ne sont pas celles dont les patrons sont les plus faciles à construire.

Un gain de temps important est obtenu en construisant une pyramide dont la hauteur est une arête. Il sera par ailleurs intéressant d'étudier les confusions qui pourront être faites entre hauteur de la pyramide et hauteur d'une face latérale triangulaire.

6.2 Éléments de solutions :

Le volume V (exprimé en cm^3) d'une pyramide est obtenu par la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire (en cm^2) de la base et h la hauteur (en cm) de cette pyramide.

Le volume est égal à $24cm^3$ si et seulement si $B \times h = 72$.

On peut alors envisager une pyramide dont la base est un carré de côté $6cm$ et de hauteur $2cm$: la pyramide peut être régulière (figure 3) ou sa hauteur peut être confondue avec une arête latérale (figure 1).

On peut aussi choisir une pyramide dont la base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement $8cm$ et $6cm$, et dont la hauteur mesure $3cm$ (figure 2).

Une pyramide ayant pour base un rectangle de longueur $6cm$ et de largeur $3cm$, et dont la hauteur mesure $4cm$ nous fournit une quatrième solution (figure 4).

Ci-dessous, on propose (à l'échelle 0,5) quelques patrons de pyramides, solutions particulières du problème posé.

Figure 1

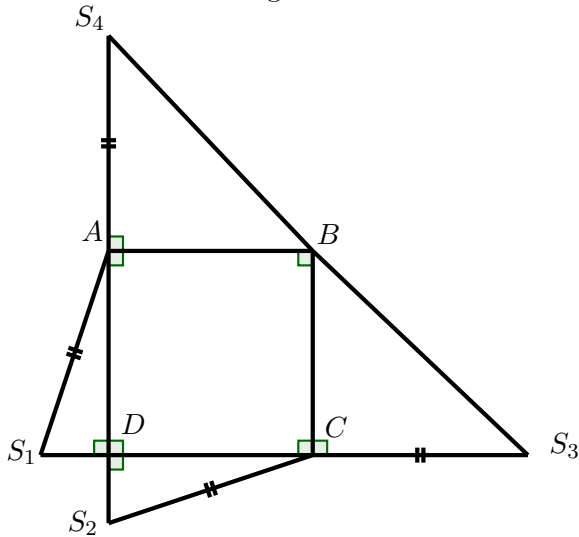


Figure 2

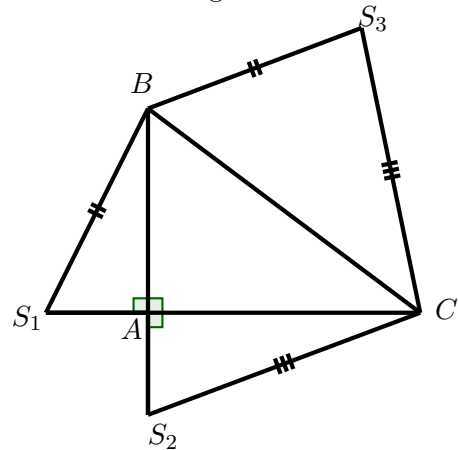


Figure 3

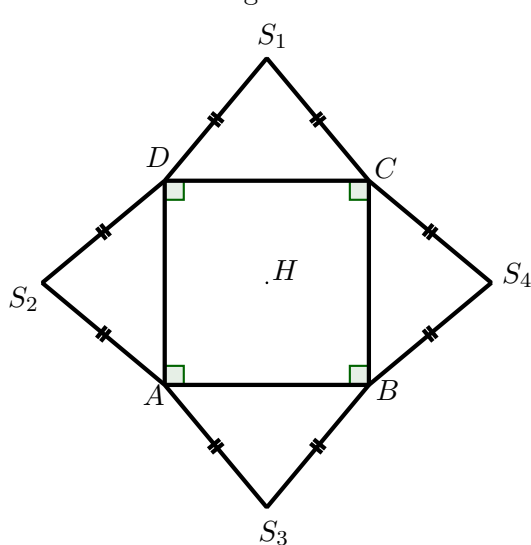
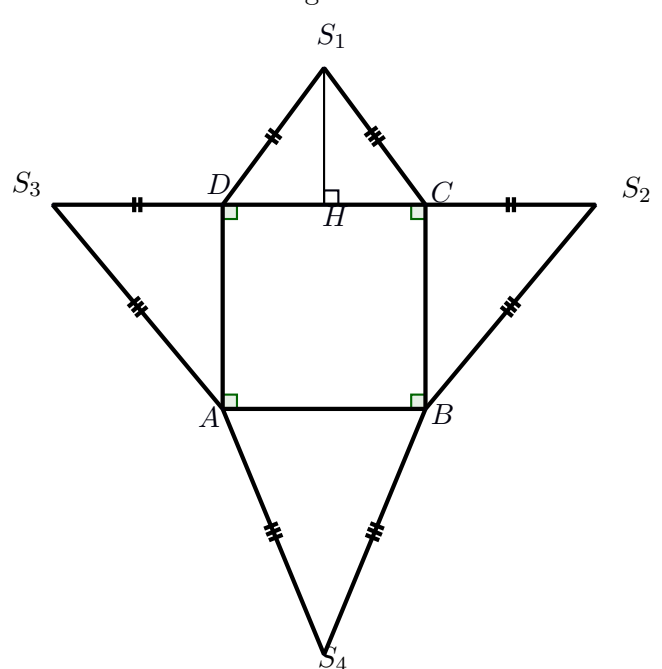
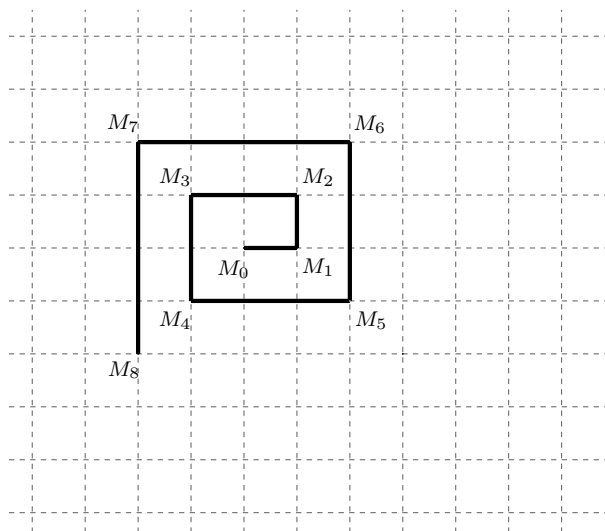


Figure 4



7 Carrés décalés

7.1 Énoncé



Pour déterminer les coordonnées de M_{2009} dans le repère orthonormé tel que $M_0(0;0)$, $M_1(1;0)$, $M_2(1;1)$, l'élève peut remarquer que les coordonnées $(x_n; y_n)$ des points M_n , pour $n \in 1, 5, 9, 13$ s'expriment en fonction du quotient q de n par 4 par $x_n = q + 1$ et $y_n = -q$

M_1	M_2	M_3	M_4
$1 = 0 \times 4 + 1$	$5 = 1 \times 4 + 1$	$9 = 2 \times 4 + 1$	$13 = 3 \times 4 + 1$
$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$y_1 = 0$	$y_2 = -1$	$y_3 = -2$	$y_4 = -3$

Sachant que $2009 = 502 \times 4 + 1$, il pourra alors écrire que $x_{2009} = 503$ et $y_{2009} = -502$.

Il peut aussi dénombrer le nombre de points à partir de M_1 jusqu'à M_{2009} , ce qui revient à compter le nombre de diagonales du carré unité du quadrillage, comme dans « fol écureuil ».

En effet, l'élève remarque que $5 = 1 \times 4 + 1$, $9 = 2 \times 4 + 1$, $13 = 3 \times 4 + 1$ et que M_5 , M_9 et M_{13} sont respectivement à 1, 2 et 3 diagonales du point M_1 .

Or $2009 = 502 \times 4 + 1$ donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1 et le point M_{2009} est à 502 diagonales de M_1

donc $x_{2009} = 502 + x_1 = 503$ et $y_{2009} = -502 + y_1 = -502$.

Solution experte :

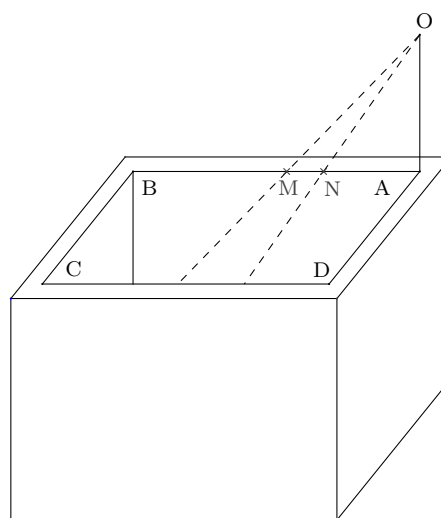
La démonstration est la même que celle décrite pour « fol écureuil », à condition d'effectuer un changement d'indice pour les points et d'équation pour la demi-droite.

8 Consommation d'eau

Pierre et Ondine utilisent l'eau de leur puits pour arroser leur jardin. L'intérieur du puits est un pavé droit dont la face $ABCD$ est un carré de **deux mètres de côté**. Le père de Pierre et Ondine a placé **verticalement** au-dessus du point A une règle percée au point O tel que $AO = 1$ m.

Le 30 juin, Ondine repère la surface de l'eau sur la droite verticale partant du point B en plaçant son oeil au point O : sa visée coupe le bord supérieur $[AB]$ du puits au point M .

Durant tout le mois de juillet, aucune pluie ne vient alimenter le puits. Le 31 juillet, Pierre effectue la même visée que sa sœur : cette visée coupe désormais le segment $[AB]$ au point N . Les longueurs AM et AN valent respectivement 80 et 40 centimètres.



La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle

Déterminez le volume d'eau du puits consommé durant le mois de juillet.

8.1 Analyse à priori

Ce problème est à première vue un problème de géométrie dans l'espace, mais si l'on excepte le calcul final de volume, tout le raisonnement géométrique peut se faire dans le plan (OAB).

Une figure à l'échelle pourrait alors permettre d'estimer la hauteur d'eau consommée sans effectuer le moindre calcul.

La reconnaissance de configurations permettant l'utilisation (à deux reprises) de la propriété de Thalès n'est pas immédiate.

De plus, l'absence de la donnée (certes inutile) de la profondeur du puits peut perturber la recherche d'élèves qui souhaiteraient avant tout connaître le volume intérieur du puits.

Il est en effet intéressant de noter qu'on doit calculer le volume d'un pavé droit représentant le volume d'eau... consommé, ce qui nécessite une faculté d'abstraction.

En résumé, ce problème présente diverses difficultés, dont la bonne compréhension de la situation, mais devrait permettre à tout groupe d'élèves de proposer une démarche(éventuellement graphique) reliant les données des points M et N au niveau de l'eau dans le puits.

8.2 Eléments de solutions

Toutes les longueurs sont exprimées en mètres.

Les points A, M, N et B sont alignés, donc les cinq points O, A, M, N et B sont situés dans un même plan. Ce plan contient la droite (d) verticale issue de B car cette droite est parallèle à (OA) . On construit alors (d) et on appelle Q et R ses points d'intersection avec respectivement (OM) et (ON) . La droite (d) étant parallèle à (OA) , on peut appliquer à deux reprises le théorème de Thalès :

- Dans les triangles MOA et MQB on obtient :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MO}{MQ} = \frac{OA}{BQ}$$

On en déduit que $\frac{0,8}{1,2} = \frac{1}{BQ}$, puis que $BQ = 1,5$

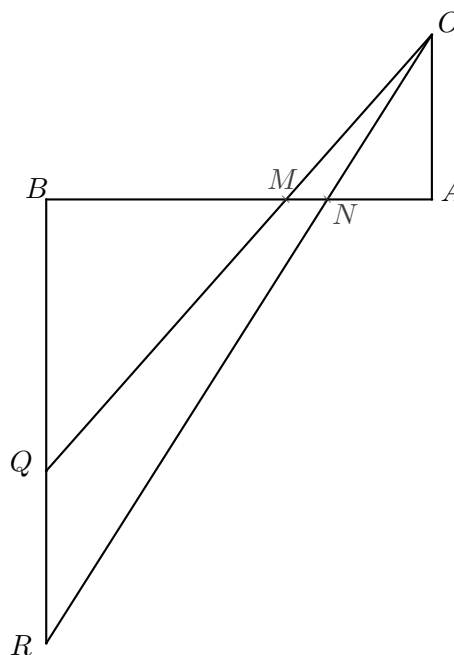
- Dans les triangle NOA et NRB , on obtient :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{NO}{NR} = \frac{OA}{BR}$$

On en déduit que $\frac{0,4}{1,6} = \frac{1}{BR}$, puis que $BR = 4$

Les points B, Q et R sont alignés dans cet ordre sur la droite (d) ; donc $QR = BR - BQ$, $QR = 2,5$
Il apparaît alors que le niveau d'eau a baissé de deux mètres et cinquante centimètres pendant l'été. Or la face $ABCD$ est un carré de côté deux mètres.

Le volume d'eau consommé (en l'absence d'évaporation et de fuites) est alors le volume d'un pavé droit, d'où $V = 2 \times 2 \times 2,5 = 10$



Durant le mois de juillet, la famille de Pierre et Ondine a consommé 10 m3 d'eau du puits.

9 L'ouvre-porte

Le code de l'ouvre-porte de l'immeuble est un nombre premier p à 3 chiffres différents.

La somme des chiffres de p est un nombre premier q à deux chiffres.

La somme des chiffres de q est un nombre premier r à un chiffre.

On ajoute l'hypothèse que les trois chiffres de p sont écrits dans l'ordre croissant.

Etes-vous en mesure de rentrer dans l'immeuble au premier essai ?

Justifiez votre démarche.

9.1 Analyse à priori

Les élèves peuvent étudier les différents cas en partant de la 3^e hypothèse, et en éliminant petit à petit les solutions qui ne sont pas des nombres premiers. Cela permet d'affirmer que la solution 137 est unique.

Ils peuvent aussi établir la liste des nombres à trois chiffres différents et dans l'ordre croissant (de 123 à 789) et chercher si ces nombres vérifient les hypothèses du problème. Comme le rallye est un travail de groupe,

cette façon de procéder est tout à fait envisageable.

L'élève qui étudiera les nombres de 100 à 200 aura par exemple à considérer 123, 127, 129, 137, 139, 147, 149, 157, 159, 167, 169, 179 et 189, tous les autres nombres étant rapidement éliminés grâce aux caractères de divisibilité.

Ensuite, en ajoutant les chiffres, on élimine douze de ces nombres. Ne reste plus qu'à vérifier que 137 est bien premier.

9.2 Solution :

Solution : Utilisons tout d'abord la 3^e donnée de l'énoncé : le nombre r sera 2 ou 3 ou 5 ou 7.

- Si $r = 2$, alors le nombre q ne peut être que 11.
- Si $r = 3$, alors q peut être égal à 12 ou 21, mais ces deux nombres ne sont pas premiers.
- Si $r = 5$, alors q peut être égal à 23 ou 32, et l'on élimine 32 qui n'est pas premier.
- Si $r = 7$, alors q peut être égal à 16, 25, 34, 43, 52 ou 61. Nous éliminons 16, 25, 34 et 52 qui ne sont pas premiers.

Les quatre possibilités pour le nombre q sont donc 11, 23, 43 et 61.

- Si $q = 11$, alors p peut être égal à 128, 137, 146, 236, 245, les autres possibilités étant éliminées car les trois chiffres de p doivent être différents et dans l'ordre croissant. Parmi ces cinq nombres, seul 137 est un nombre premier.
- Si $q = 23$, alors p ne peut être que 689, mais 689 est le produit de 13 par 53 et ne convient donc pas.
- Si $q = 43$ ou 61, ce n'est tout simplement pas possible car la somme des chiffres de p est plus petite que 27.

Le seul code possible est 137.